正保考研
www.cnedu.cn

2022 年数学一试题

一、选择题（1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）已知$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则

（A）$f(1)=0$　（B）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$　（C）$f'(1)=1$　（D）$\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$

（2）已知$z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，且$f(u)$可导，若$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$，则

（A）$f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=\dfrac{1}{2}$　（B）$f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$

（C）$f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=1$　（D）$f(1)=0,f'(1)=1$

（3）设有数列$\{x_n\}$，其中x_n满足$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则

（A）若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

（C）若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

（D）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

（4）已知$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x,I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x,I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_2<I_1<I_3$

（C）$I_1<I_3<I_2$　（D）$I_3<I_2<I_1$

（5）下列 4 个条件中，3 阶矩阵A可对角化的一个充分但不必要条件为

（A）A有三个不相等的特征值

（B）A有三个线性无关的特征向量

（C）A 有三个两两线性无关的特征向量

（D）A 的属于不同特征值的特征向量相互正交

（6）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，如果方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 及 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则

（A）方程组 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

（B）方程组 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

（C）方程组 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解

（D）方程组 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解

（7）设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则 λ 的取值范围是

（A）$\{0,1\}$

（B）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$

（C）$\{\lambda|\lambda\in R$ 且 $\lambda\neq-1,\lambda\neq 2\}$

（D）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

（8）设随机变量 $X\sim U(0,3)$，随机变量 Y 服从参数为2的泊松分布，且 X 与 Y 的协方差为 -1，则 $D(2X-Y+1)=$

（A）1

（B）5

（C）9

（D）12

（9）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 X_1 的 4 阶矩存在，设 $\mu_k=E\left(X_1^k\right)$ $(k=1,2,3,4)$，则由切比雪夫不等式，对 $\forall\varepsilon>0$，有 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant$

（A）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$ （B）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\,\varepsilon^2}$ （C）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$ （D）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\,\varepsilon^2}$

（10）设随机变量$X\sim N(0,1)$，在$X=x$条件下，随机变量$Y\sim N(x,1)$，则X与Y的相关系数为

（A）$\dfrac{1}{4}$ （B）$\dfrac{1}{2}$ （C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ （D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题（11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）函数$f(x,y)=x^2+2y^2$在点$(0,1)$的最大方向导数为________.

（12）$\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________.

（13）当$x\geqslant 0,y\geqslant 0$时，$x^2+y^2\leqslant k\mathrm{e}^{x+y}$恒成立，则$k$的取值范围是________.

（14）已知级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$的收敛域为$(a,+\infty)$，则$a=$________.

（15）已知矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆，其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵，若矩阵$\boldsymbol{B}$满足$(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$________.

（16）设A,B,C为三个随机事件，A与B互不相容，A与C互不相容，B与C相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$，则$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=$________.

三、解答题（17～22 小题，共 70 分）

（17）（本题满分 10 分）

设函数$y=y(x)$是微分方程$y'+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$满足$y(1)=3$的解，求曲线$y=y(x)$的渐近线.

（18）（本题满分 12 分）

已知平面区域$\left\{(x,y)|y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算$I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

（19）（本题满分 12 分）

已知Σ是曲面$4x^2+y^2+z^2=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$的上侧， Σ的边界曲线L的方向与Σ的正法向量满足右手法则，计算曲线积分

$$I=\oint_L\left(yz^2-\cos z\right)\mathrm{d}x+2xz^2\mathrm{d}y+(2xyz+x\sin z)\mathrm{d}z.$$

（20）（本题满分 12 分）

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geqslant 0$的充要条件为对不同实数a,b，

有$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

（21）（本题满分 12 分）

已知二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}ijx_iy_j$.

（I）写出$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$对应的矩阵；

（II）求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$将$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$化为标准形；

（III）求$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=0$的解.

（22）（本题满分 12 分）

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自期望为θ的指数分布的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自期望为2θ的指数分布的简单随机样本，且两个样本相互独立，其中$\theta(\theta>0)$为未知参数.利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$求$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并求$D\left(\hat{\theta}\right)$.