2022 年数学一试题解析

一、选择题（1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）已知$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则

（A）$f(1)=0$　（B）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$　（C）$f'(1)=1$　（D）$\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$

【答案】选（B）.

【解析】$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}\ln x=1\cdot 0=0$，故答案选（B）.

（2）已知$z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，且$f(u)$可导，若$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$，则

（A）$f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=\dfrac{1}{2}$　（B）$f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$

（C）$f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=1$　（D）$f(1)=0,f'(1)=1$

【答案】选（B）.

【解析】由

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=yf\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yf'\left(\frac{y}{x}\right),$$

得
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xyf\left(\frac{y}{x}\right)-y^2f'\left(\frac{y}{x}\right)+xyf\left(\frac{y}{x}\right)+y^2f'\left(\frac{y}{x}\right)=2xyf\left(\frac{y}{x}\right),$$

于是$2xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)=y^2(\ln y-\ln x)=y^2\ln\dfrac{y}{x}$，进而$f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，即$f(u)=\dfrac{1}{2}u\ln(u)$，所以$f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

（3）设有数列$\{x_n\}$，其中x_n满足$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则

（A）若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\sin x_n\right)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\cos x_n\right)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在

【答案】 选（D）.

【解析】 若取 $x_n=(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\sin x_n\right)=\cos 1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 均不存在，故排除（A）与（C）；当 $x_n=(-1)^n$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\cos x_n\right)=\sin 1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在，故排除（B）；所以答案选（D）.

【注】 如果注意到 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，$\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上不是单调的，则易知（D）正确.

（4）已知 $I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x, I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_2<I_1<I_3$

（C）$I_1<I_3<I_2$　　（D）$I_3<I_2<I_1$

【答案】 选(A).

【解析】 当 $0<x<1$ 时，$\frac{x}{2}<\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ 且 $1+\cos x>1>\frac{1+\sin x}{2}$，

$$\frac{x}{2(1+\cos x)}<\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\frac{x}{1+\cos x}<\frac{2x}{1+\sin x},$$

所以 $I_1<I_2<I_3$.

（5）下列 4 个条件中，3 阶矩阵 A 可对角化的一个充分但不必要条件为

（A）A 有三个不相等的特征值

（B）A 有三个线性无关的特征向量

（C）A 有三个两两线性无关的特征向量

（D）A 的属于不同特征值的特征向量相互正交

【答案】 选（A）.

【解析】（A）是 A 可对角化的充分但非必要条件；（B）是 A 可对角化的充要条件；（C）是 A 可对角化的必要但非充分条件；（D）是 A 可对角化的既非充分也非必要条件.

（6）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，如果方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 及 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则

（A）方程组$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$只有零解

（B）方程组$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$只有零解

（C）方程组$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$与$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$同解

（D）方程组$\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$与$\begin{bmatrix} \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$同解

【答案】选（C）.

【解析】由初等行变换，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix},$$

令$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$均为$\boldsymbol{n}$维列向量，则第一个方程组等价于$\boldsymbol{Ay}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{By}_2=\boldsymbol{0}$；第二个方程组等价于$\boldsymbol{By}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{Ay}_2=\boldsymbol{0}$，而$\boldsymbol{Ay}_1=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{By}_1=\boldsymbol{0}$同解，$\boldsymbol{Ay}_2=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{By}_2=\boldsymbol{0}$，因此方程组$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$与$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$同解.

（7）设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，则$\lambda$的取值范围是

（A）$\{0,1\}$

（B）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$

（C）$\{\lambda|\lambda\in R$且$\lambda\neq-1,\lambda\neq2\}$

（D）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

【答案】选(C).

【解析】 由$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & (2+\lambda)(1-\lambda) & (\lambda+1)^2(1-\lambda)\end{bmatrix},$$

当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq-1$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价.

当$\lambda=1$时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价.

当$\lambda=-1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$,

此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$不等价.

当$\lambda=-2$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$,

此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$不等价.

综上，答案选(C).

（8）设随机变量$X\sim U(0,3)$，随机变量Y服从参数为2的泊松分布，且X与Y的协方差为-1，则$D(2X-Y+1)=$

（A）1　　（B）5　　（C）9　　（D）12

【答案】 选（C）.

【解析】 $D(2X-Y+1)=4DX+DY-4\mathrm{Cov}(X,Y)=4\cdot\dfrac{(3-0)^2}{12}+2-4\cdot(-1)=9$.

（9）设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，且X_1的4阶矩存在，设$\mu_k=E(X_1^k)$ $(k=1,2,3,4)$，则由切比雪夫不等式，对$\forall\varepsilon>0$，有$P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geq\varepsilon\right\}\leq$

（A）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$　　（B）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\,\varepsilon^2}$　　（C）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$　　（D）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\,\varepsilon^2}$

【答案】 选（A）.

【解析】 令$Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，则$E(Y)=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=E(X_1^2)=\mu_2$，根据切比雪夫不等式有

$$P\{|Y-\mu_2|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DY}{\varepsilon^2}=\frac{DX_1^2}{n\varepsilon}=\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}.$$

（10）设随机变量$X\sim N(0,1)$，在$X=x$条件下，随机变量$Y\sim N(x,1)$，则X与Y的相关系数为

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】 选（D）.

【解析】 依题设，X的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$$

Y关于$X=x$的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$$

X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}},-\infty<x,y<+\infty,$$

于是Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}},-\infty<y<+\infty,$$

即$Y\sim N(0,2)$，从而$DY=2$.

所以$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{1-0}{1\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

二、填空题（11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在点 $(0,1)$ 的最大方向导数为________.

【答案】4.

【解析】方向导数的最大值为该点处梯度的模.有 $f(x,y)=x^2+2y^2$，得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\left.2x\right|_{(0,1)}=0,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\left.4y\right|_{(0,1)}=4,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处的最大方向导数为 $|\mathbf{grad}f(0,1)|=4$.

（12）$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________.

【答案】4.

【解析】利用分部积分法，有

$$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_1^{e^2}\ln x\,\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4e-4\sqrt{x}\Big|_1^{e^2}=4.$$

（13）当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 时，$x^2+y^2\leqslant ke^{x+y}$ 恒成立，则 k 的取值范围是________.

【答案】$\left[\frac{4}{e^2},+\infty\right)$.

【解析】$x^2+y^2\leqslant ke^{x+y}\Leftrightarrow k\geqslant(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.令

$$f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x+y)},x\geqslant 0,y\geqslant 0.$$

当 $x>0,y>0$ 时，由

$$\begin{cases}f'_x=(2x-x^2-y^2)e^{-(x+y)}=0\\ f'_y=(2y-x^2-y^2)e^{-(x+y)}=0\end{cases},$$

得驻点 $(1,1)$，且 $f(1,1)=\frac{2}{e^2}$.

当 $x=0$ 时，$f(0,y)=y^2e^{-y}=g(y)$，$g'(y)=(2y-y^2)e^{-y}=0$，得 $y=0$ 或 $y=2$，此时得 $f(x,y)$ 的驻点为 $(0,2)$ 或 $(0,0)$，且 $f(0,2)=\frac{4}{e^2},f(0,0)=0$.

当$y=0$时，$f(x,0)=x^2\mathrm{e}^{-x}=\varphi(x)$，$\varphi'(x)=\left(2x-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}=0$，得$x=0$或$x=2$，此时

得$f(x,y)$的驻点为$(2,0)$，且$f(2,0)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

综上，$f(x,y)$的最大值为$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$，故$k\geqslant\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

（14）已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$的收敛域为$(a,+\infty)$，则$a=$________.

【答案】 -1.

【解析】 记$u_n=\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$，由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|}=\mathrm{e}^{-x-1}<1,$$

解得$x>-1$，故$a=-1$.

（15）已知矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆，其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵，若矩阵$\boldsymbol{B}$满足

$\left(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$________.

【答案】 $-\boldsymbol{E}$.

【解析】 由$\left(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，得$\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，进而

$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$，于是

$-\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，即$(-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.因为$\boldsymbol{A}$可逆，所以$-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，故

$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$.

（16）设A,B,C为三个随机事件，A与B互不相容，A与C互不相容，B与C相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$，则$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=$________.

【答案】 $\dfrac{5}{8}$.

【解析】 依题设，$P(AB)=0,P(AC)=0,P(BC)=P(B)P(C)=\dfrac{1}{9}$；

由条件概率公式得：

$$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=\frac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$$
$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)}$$
$$=\frac{5}{8}.$$

三、解答题（17～22 小题，共 70 分）

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

【解析】依题设，由一阶线性微分方程的通解公式得

$$y(x)=e^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}(2+\sqrt{x})dx+C\right)=e^{-\sqrt{x}}\left(2xe^{\sqrt{x}}+C\right).$$

由 $y(1)=3$，得 $C=e$；故 $y(x)=e^{-\sqrt{x}}\left(2xe^{\sqrt{x}}+e\right)=2x+e^{1-\sqrt{x}}$.

显然曲线 $y=y(x)$ 没有垂直和水平渐近线，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-\sqrt{x}}=0$，知 $y=y(x)$ 有斜渐近线 $y=2x$.

（18）（本题满分 12 分）

已知平面区域 $\left\{(x,y)|y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

【解析】利用极坐标得

$$I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2\frac{(r\cos\theta-r\sin\theta)^2}{r^2}rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}}\frac{(r\cos\theta-r\sin\theta)^2}{r^2}rdr$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\theta\sin\theta)d\theta+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta=2\pi-2.$$

（19）（本题满分 12 分）

已知Σ是曲面$4x^2+y^2+z^2=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$的上侧， Σ的边界曲线L的方向与Σ的正法向量满足右手法则，计算曲线积分

$$I=\oint_L (yz^2-\cos z)\mathrm{d}x+2xz^2\mathrm{d}y+(2xyz+x\sin z)\mathrm{d}z.$$

【解析】曲面Σ与三个坐标面的交点分别为$A\left(\frac{1}{2},0,0\right), B(0,1,0), C(0,0,1)$，曲线$L$分成三段，分别为$L_1:A\to B, L_2:B\to C, L_3:C\to A$.

在L_1上$z=0$，L_2上$x=0$，L_3上$y=0$，则

$$I=\oint_L (yz^2-\cos z)\mathrm{d}x+2xz^2\mathrm{d}y+(2xyz+x\sin z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{L_1+L_2+L_3} (yz^2-\cos z)\mathrm{d}x+2xz^2\mathrm{d}y+(2xyz+x\sin z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{L_1}(-1)\mathrm{d}x+0+\int_{L_3}(-\cos z)\mathrm{d}x+x\sin z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}-\int_{L_3}\mathrm{d}(x\cos z)$$

$$=\frac{1}{2}-x\cos z\Big|_{(0,0,1)}^{\left(\frac{1}{2},0,0\right)}=0.$$

（20）（本题满分 12 分）

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geqslant 0$的充要条件为对不同实数a,b，有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】先证明必要性：不妨假设$a<b$，当$a<x<b$，由泰勒公式得

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

其中ξ介于x与$\frac{a+b}{2}$之间，由$f''(x)\geqslant 0$，知

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

上式两边取积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

即$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，故必要性得证.

再证明充分性：考虑利用反证法.已知$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

假设存在x_0，使得$f''(x_0)<0$，由$f''(x)$连续可知，存在一个闭区间$[a,b]$包含x_0，使得

$f''(x)<0$恒成立.于是

$$f(x)<f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

取积分有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

即$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，这与$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$矛盾，故充分性得证.

（21）（本题满分 12 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_iy_j$.

（I）写出$f(x_1,x_2,x_3)$对应的矩阵；

（II）求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形；

（III）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

【解析】（I）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3$，

二次型矩阵为
$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}.$$

（II）由

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-4&-6\\-3&-3&\lambda-9\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-14),$$

得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=14$.

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，解方程组$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得两个正交的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^T$,

$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,6,-5)^T$；

当$\lambda_3=14$时，解方程组$(14\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3)^T$；

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$已经相互正交，只需对其单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{70}}\\ \frac{6}{\sqrt{70}}\\ -\frac{5}{\sqrt{70}}\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}}\end{bmatrix},$$

令$\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3\right)$，则经正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\left(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\right)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\left(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\right)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=14y_3^2.$$

（III）由（II）知，当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$时，$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=14y_3^2=0$，得$y_3=0,y_1,y_2$为任意常数，令$y_1=k_1,y_2=k_2$，故$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=0$的解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\left(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3\right)\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ 0\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{70}}\\ \frac{6}{\sqrt{70}}\\ -\frac{5}{\sqrt{70}}\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\ 6\\ -5\end{bmatrix}.$$

（22）（本题满分 12 分）

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自期望为θ的指数分布的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自期望为2θ的指数分布的简单随机样本，且两个样本相互独立，其中$\theta(\theta>0)$为未知参数.利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$求$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并求$D\left(\hat{\theta}\right)$.

【解析】两个总体的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}, \quad g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

设样本$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$的观测值为$x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m$，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\prod_{j=1}^{m}f(y_i)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2^m}\dfrac{1}{\theta^{n+m}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{2\theta}\sum\limits_{j=1}^{m}y_i}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0,y_1,y_2,\cdots,y_m>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

当$x_1,x_2,\cdots,x_n>0,y_1,y_2,\cdots,y_m>0$时，

$$\ln L(\theta)=-m\ln 2-(n+m)\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{2\theta}\sum_{j=1}^{m}y_j,$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n+m}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\dfrac{1}{2\theta^2}\sum\limits_{j=1}^{m}y_i=0$，

解得$\theta=\dfrac{1}{n+m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}y_j\right)$，于是$\theta$的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right).$$

$$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{1}{(n+m)^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\frac{1}{(n+m)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}D(Y_j)\right)$$

$$=\frac{1}{(n+m)^2}\left(n\theta^2+\frac{1}{4}\cdot 4m\theta^2\right)=\frac{\theta^2}{n+m}.$$