2022 年数学三试题解析

一、选择题（1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项时最符合题目要求的.）

(1)当$x\to 0$时，$\alpha(x),\beta(x)$是非零无穷小量，给出下列四个命题：

①若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

②若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

④若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

其中正确的序号是

(A)①②　　(B)①④　　(C)①③④　　(D)②③④

【答案】 选(C).

【解析】 当$x\to 0$时，若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right]^2=1$；且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

所以①③正确.

若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)-o(\alpha(x))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$，则

$\alpha(x)\sim\beta(x)$；故④正确；

若取$\alpha(x)=-x,\beta(x)=\sin x$，则当$x\to 0$时，$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，但$\alpha(x)$与$\beta(x)$不是等价无穷小，故②错误.综上，答案选(C).

(2)已知$a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则$\{a_n\}$

(A)有最大值，有最小值　　(B)有最大值，没有最小值

(C)没有最大值，有最小值　　(D)没有最大值，没有最小值

【答案】 选(A).

【解析】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，且$a_1=2>1,a_2=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}=<1$；故存在$N>0$，当

$n > N$ 时，有 $a_2 < a_n < a_1$，所以 $\{a_n\}$ 有最大值和最小值.

(3)设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$，则

(A) $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(B) $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(D) $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

【答案】选(C).

【解析】由

$$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t=(x-y)\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-y}tf(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+(x-y)f(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t,$$

且
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-(x-y)f(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t,$$

且
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y);$$

故
$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

(4)已知 $I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x,I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x,I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_2<I_1<I_3$ (C) $I_1<I_3<I_2$ (D) $I_3<I_2<I_1$

【答案】选(A).

【解析】当$0<x<1$时，$\dfrac{x}{2}<\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$且$1+\cos x>1>\dfrac{1+\sin x}{2}$，

$$\frac{x}{2(1+\cos x)}<\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\frac{x}{1+\cos x}<\frac{2x}{1+\sin x},$$

所以$I_1<I_2<I_3$.

(5)设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$的充分必要条件是

(A)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$ (B)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$

(C)存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$ (D)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{T}$

【答案】选(B).

【解析】若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，即$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{\Lambda}$相似，且$\boldsymbol{\Lambda}$的特征值为$1,-1,0$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$；

若$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$，则三阶矩阵$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.故答案选(B).

(6)设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，则线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解的情况为

(A)无解 (B)有解 (C)有无穷多解或无解 (D)有唯一解或无解

【答案】选(D).

【解析】$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&b\\1&a^2&b^2\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(b-a)$，当$|A|\neq0$，即

$a\neq1,b\neq1,a\neq b$时，方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解；

当$a=1$时，$(A,b)=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&2\\1&b&b^2&4\end{array}\right]$，方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$无解；

当$b=1$时，$(A,b)=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&1&1&4\end{array}\right]$，方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$无解；

当$a=b$时，$(A,b)=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&a&a^2&4\end{array}\right]$，方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$无解；

因此线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解或无解.

(7)设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\\lambda\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}$，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，则$\lambda$的取值范围是

(A)$\{0,1\}$

(B)$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$

(C)$\{\lambda|\lambda\in R$且$\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$

(D)$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

【答案】选(C).

【解析】由$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda^3\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&0&(2+\lambda)(1-\lambda)&(\lambda+1)^2(1-\lambda)\end{bmatrix},$$

当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq-1$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价.

当$\lambda=1$时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价.

当$\lambda=-1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&2&-2\\0&0&2&0\end{bmatrix}$，

此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$不等价.

当$\lambda=-2$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&3\end{bmatrix}$，

此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$不等价.

综上，答案选(C).

(8)设随机变量$X\sim N(0,4),Y\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，且$X$与$Y$不相关，则$D(X-3Y+1)=$

(A)2　　(B)4　　(C)6　　(D)10

【答案】选(D).

【解析】由$X\sim N(0,4),Y\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，知$DX=4,DY=3\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$，又$X$与$Y$不相关，故$D(X-3Y+1)=DX+9DY=4+9\times\frac{2}{3}=10$.

(9)设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，且X_1的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|,|x|<1\\0,\qquad\text{其他}\end{cases},$$

则当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于

(A)$\frac{1}{8}$　　(B)$\frac{1}{6}$　　(C)$\frac{1}{3}$　　(D)$\frac{1}{2}$

【答案】选(B).

【解析】根据辛钦大数定律知，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于

$$E(X_1^2)=\int_{-1}^{1}x^2(1-|x|)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$

(10)设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件$\{\max(X,Y)=2\}$与事件$\{\min(X,Y)=1\}$相互独立，则$\mathrm{Cov}(X,Y)=$

(A)-0.6　　　(B)-0.36　　　(C)0　　　(D)0.48

【答案】 选(B).

【解析】 令事件 $A=\{\max(X,Y)=2\}, B=\{\min(X,Y)=1\}$，则

$$P(A)=P\{Y=2\}=b+0.1,$$

$$P(B)=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=0.1+0.1=0.2,$$

$$P(AB)=P\{X=1,Y=2\}=0.1,$$

由于事件 A 与 B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 $0.2(b+0.1)=0.1$，得 $b=0.4$.

又 $a+b+0.4=1$，得 $a=0.2$.则 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.1	0.1	0.4
1	0.2	0.1	0.1

且 $EX=-0.2, EY=1.2, EXY=-0.6$，故

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=-0.36.$$

二、填空题（11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$________.

【答案】 $e^{\frac{1}{2}}$.

【解析】 此为“1^{∞}”型.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}-1\right)\cdot\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=e^{\frac{1}{2}}$.

(12) $\displaystyle\int_0^2\frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx=$________.

【答案】 $\ln 3-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

【解析】$\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx=\int_0^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx-\int_0^2 \frac{6}{x^2+2x+4}dx$

$$=\ln(x^2+2x+4)\Big|_0^2-6\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2+3}$$

$$=\ln 3-\frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^2=\ln 3-\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(13)已知函数$f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则$f'''(2\pi)=$________.

【答案】0.

【解析】显然$f(x)$是周期为2π的偶函数，所以$f'''(x)$是周期为2π的奇函数，故

$$f'''(2\pi)=f'''(0)=0.$$

(14)已知函数$f(x)=\begin{cases} e^x, 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，则$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=$________.

【答案】e^2-2e+1.

【解析】由题设，知积分域为

$$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y-x\leqslant 1\}=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, x\leqslant y\leqslant x+1\},$$

故$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=\int_0^1 dx\int_x^{x+1}e^x\cdot e^{y-x}dy$

$$=\int_0^1 dx\int_x^{x+1}e^y dy=e^2-2e+1.$$

(15)设A为3阶矩阵，交换A的第二行和第三行，再将第二列的-1倍加到第一列，得到矩阵$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$A^{-1}$的迹$\mathrm{tr}(A^{-1})=$________.

【答案】-1.

【解析】依题设，有

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

于是$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\-1&0&0\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix},$$

于是$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}$，所以$\mathrm{tr}(A^{-1})=-1$.

(16)设A,B,C为三个随机事件，A与B互不相容，A与C互不相容，B与C相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=$________.

【答案】$\frac{5}{8}$.

【解析】依题设，$P(AB)=0,P(AC)=0,P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{9}$；

由条件概率公式得：

$$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=\frac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$$
$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)}$$
$$=\frac{5}{8}.$$

三、解答题（17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 10 分）

设函数$y=y(x)$是微分方程$y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$满足$y(1)=3$的解，求曲线$y=y(x)$的渐近线.

【解析】依题设，由一阶线性微分方程的通解公式得

$$y(x)=e^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}(2+\sqrt{x})dx+C\right)=e^{-\sqrt{x}}\left(2xe^{\sqrt{x}}+C\right).$$

由$y(1)=3$，得$C=e$；故$y(x)=e^{-\sqrt{x}}\left(2xe^{\sqrt{x}}+e\right)=2x+e^{1-\sqrt{x}}$.

显然曲线$y=y(x)$没有垂直和水平渐近线，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}=0$，知

$y=y(x)$有斜渐近线$y=2x$.

(18)（本题满分 12 分）

设某产品的产量Q由资本投入量x和劳动投入量y决定，生产函数为$Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价$p$与$Q$的关系为$p=1160-1.5Q$，若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为6和8，求利润最大时的产量.

【解析】由题意知利润函数为

$$L=pQ-6x-8y=(1160-1.5Q)Q-6x-8y=13920x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}-216y^{\frac{1}{3}}-6x-8y,$$

由

$$\begin{cases} L_x'=6960x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}-216y^{\frac{1}{3}}-6=0 \\ L_y'=2320x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{6}}-72y^{-\frac{2}{3}}-8=0 \end{cases},$$

解得唯一驻点为$(256,64)$，由问题的实际意义知该唯一驻点就是利润最大的点，此时产量为$Q=12\times\sqrt{256}\times\sqrt[6]{64}=384$.

(19)（本题满分 12 分）

已知平面区域$\left\{(x,y)|y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算$I=\iint\limits_D\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【解析】利用极坐标得

$$I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{(r\cos\theta-r\sin\theta)^2}{r^2}r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}}\frac{(r\cos\theta-r\sin\theta)^2}{r^2}r\,\mathrm{d}r$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi-2.$$

(20)（本题满分 12 分）

求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$的收敛域及和函数$S(x)$.

【解析】由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-4)^{n+1}+1}{4^{n+1}(2n+3)}x^{2n+2}}{\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}}\right|=x^2<1$，得收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=\pm1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}$收敛，故收敛域为$[-1,1]$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n}=S_1(x)+S_2(x),$$

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\frac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{\arctan x}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1]\\ 1, & x=0\end{cases}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}t^{2n}=f(t),t=\frac{x}{2}\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],$$

当$t=0$时，$f(0)=1$.当$t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],t\neq0$时，

$$f(t)=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t u^{2n}\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}u^{2n}\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$$

$$=\frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t}=\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}.$$

综上，

$$S(x)=\begin{cases}\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1]\\ 2, & x=0\end{cases}.$$

(21)（本题满分 12 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(I)求正交变换$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$化二次型为标准形；

(II)证明：$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2$.

【解析】(I)二次型矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{bmatrix}$，由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\0&\lambda-4&0\\-1&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-2),$$

得矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=2$.

当$\lambda_1=\lambda_2=4$时，解方程组$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征值$\lambda=4$的线性无关的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$.

当$\lambda_3=2$时，解方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^T$.

经检验$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$已经相互正交，故只需将其单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则经正交变换$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$，经二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形$4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$.

(II)由(I)知，当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$时，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$，于是

$$\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=\frac{g(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}=\frac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=2+\frac{2y_1^2+2y_2^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\geqslant 2,$$

取$y_1=0, y_2=0, y_3=1$时等号成立，故$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2$.

(22)（本题满分 12 分）

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自均值为θ的指数分布的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自均值为2θ的指数分布的简单随机样本，且两个样本相互独立，其中$\theta(\theta>0)$为未知参数.利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$求$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并求$D\left(\hat{\theta}\right)$.

【解析】两个总体的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}x}, x>0\\ 0, \quad 其他\end{cases},\quad g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}y}, y>0\\ 0, \quad 其他\end{cases},$$

设样本$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$的观测值为$x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m$，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\prod_{j=1}^{m}f(y_i)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2^m}\dfrac{1}{\theta^{n+m}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{2\theta}\sum\limits_{j=1}^{m}y_i}, x_1,x_2,\cdots,x_n>0, y_1,y_2,\cdots,y_m>0\\ 0, \quad 其他\end{cases},$$

当$x_1,x_2,\cdots,x_n>0, y_1,y_2,\cdots,y_m>0$时，

$$\ln L(\theta)=-m\ln 2-(n+m)\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{2\theta}\sum_{j=1}^{m}y_j,$$

由$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n+m}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\dfrac{1}{2\theta^2}\sum\limits_{j=1}^{m}y_i=0$,

解得$\theta=\dfrac{1}{n+m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}y_j\right)$，于是$\theta$的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right).$$

$$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{1}{(n+m)^{2}}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_{i}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_{j}\right)=\frac{1}{(n+m)^{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}D\left(X_{i}\right)+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}D\left(Y_{j}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{(n+m)^{2}}\left(n\theta^{2}+\frac{1}{4}\cdot 4m\theta^{2}\right)=\frac{\theta^{2}}{n+m}.$$