2023 年数学一试题

一、选择题（1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项时最符合题目要求的.）

(1)曲线$y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$的斜渐近线为

(A)$y=x+\mathrm{e}$　　(B)$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

(C)$y=x$　　(D)$y=x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

(2)若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则

(A)$a<0,b>0$　　(B)$a>0,b>0$

(C)$a=0,b>0$　　(D)$a=0,b<0$

(3)设函数$y=f(x)$是由$\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t.\end{cases}$确定，则

(A)$f(x)$连续，$f'(0)$不存在　　(B)$f'(0)$存在，$f'(x)$在$x=0$处不连续

(C)$f'(x)$连续，$f''(0)$不存在　　(D)$f''(0)$存在，$f''(x)$在$x=0$处不连续

(4)已知$a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛”的

(A)充分必要条件　　(B)充分不必要条件

(C)必要不充分条件　　(D)既非充分也非必要条件

(5)已知n阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵，记矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$的秩分别为$r_1,r_2,r_3$，则

(A)$r_1\leqslant r_2\leqslant r_3$　　(B)$r_1\leqslant r_3\leqslant r_2$

(C)$r_3\leqslant r_1\leqslant r_2$　　(D)$r_2\leqslant r_1\leqslant r_3$

(6)下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

(A)$\begin{bmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$　　(B)$\begin{bmatrix}1&1&a\\1&2&0\\a&0&3\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}1&1&a\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}$

(7)已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\5\\9\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.若$\boldsymbol{\gamma}$可有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，则$\boldsymbol{\gamma}=$

(A)$k\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (B)$k\begin{bmatrix}3\\5\\10\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (C)$k\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (D)$k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$

(8)设随机变量X服从参数为1的泊松分布，则$E(|X-EX|)=$

(A)$\frac{1}{\mathrm{e}}$ (B)$\frac{1}{2}$ (C)$\frac{2}{\mathrm{e}}$ (D)1

(9)设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自总体$N(\mu_2,2\sigma^2)$的简单随机样本，且两样本相互独立，记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$，

$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$，则

(A)$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$ (B)$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(C)$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$ (D)$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(10)设X_1,X_2为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中$\sigma(\sigma>0)$是未知参数.记$\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$，若$E(\hat{\sigma})=\sigma$，则$a=$

(A)$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (C)$\sqrt{\pi}$ (D)$\sqrt{2\pi}$

二、填空题（11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

(11)当$x\to0$时，函数$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$与$g(x)=\mathrm{e}^{x^2}-\cos x$是等价无穷小，则$ab=$________.

(12)曲面$z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$在点$(0,0,0)$处的切平面方程为________.

(13) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=1-x,x\in[0,1]$，若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$________.

(14) 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)-f(x)=x,\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(15)已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，若 $\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_i,(i=1,2,3)$，则 $k_1^2+k_2^2+k_3^2=$_______.

(16) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim B\left(1,\frac{1}{3}\right),Y\sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$，则 $P\{X=Y\}=$ ________.

三、解答题（17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 10 分）

设曲线 $y=y(x)\ (x>0)$ 经过点 $(1,2)$，该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(I)求 $y(x)$；

(II)求函数 $f(x)=\int_1^x y(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

(18)（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

(19)（本题满分 12 分）

设空间有界区域Ω由柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=0$和$x+z=1$围成，Σ为Ω边界的外侧，计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma} 2xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+xz\cos y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3yz\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

(20)（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数，证明：

(I)若$f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

(II)若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得

$$|f''(\eta)|\geqslant\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

(21)（本题满分 12 分）

已 知 二 次 型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$ ，$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$.

(I)求可逆变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$；

(II)是否存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$.

(22)（本题满分 12 分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2), & x^2+y^2\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(I)求X与Y的协方差;
(II)X与Y是否相互独立?
(III)求$Z=X^2+Y^2$的概率密度.