2023 年数学二试题

一、选择题（1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项时最符合题目要求的.）

(1)曲线$y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)$的斜渐近线为

(A)$y=x+\mathrm{e}$　　(B)$y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$

(C)$y=x$　　(D)$y=x-\frac{1}{\mathrm{e}}$

(2)函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0.\end{cases}$ 的一个原函数是

(A)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right), & x\leqslant 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$　　(B)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right), & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$　　(D)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$

(3)已知$\{x_n\}$,$\{y_n\}$满足：$x_1=y_1=\frac{1}{2}$,$x_{n+1}=\sin x_n$,$y_{n+1}=y_n^2\,(n=1,2,\cdots)$，则当$n\to\infty$时，

(A)x_n是y_n高阶无穷小　　(B) y_n是x_n高阶无穷小

(C) x_n与y_n是等价无穷小　　(D) x_n与y_n是同阶但不等价无穷小

(4)若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则

(A)$a<0,b>0$　　(B)$a>0,b>0$

(C)$a=0,b>0$　　(D)$a=0,b<0$

(5) 设函数$y=f(x)$是由$\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t.\end{cases}$确定，则

(A)$f(x)$连续，$f'(0)$不存在　　(B)$f'(0)$存在，$f'(x)$在$x=0$处不连续

(C)$f'(x)$连续，$f''(0)$不存在　　(D)$f''(0)$存在，$f''(x)$在$x=0$处不连续

(6)若函数$f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$在$\alpha=\alpha_0$处取得最小值，则$\alpha_0=$

(A)$-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$　　(B)$-\ln(\ln 2)$　　(C)$\frac{1}{\ln 2}$　　(D)$\ln 2$

(7)设函数$f(x)=(x^2+a)e^x$.若$f(x)$没有极值点，但曲线$y=f(x)$有拐点，则a得取值范围是

(A)$[0,1)$ (B)$[1,+\infty)$ (C)$[1,2)$ (D)$[2,+\infty)$

(8)设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$为$\boldsymbol{M}$的伴随矩阵，则$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^*=$

(A)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$

(9)二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$的规范形为

(A)$y_1^2+y_2^2$ (B)$y_1^2-y_2^2$ (C)$y_1^2+y_2^2-4y_3^2$ (D)$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(10)已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\5\\9\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.若$\boldsymbol{\gamma}$可有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，则$\boldsymbol{\gamma}=$

(A)$k\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (B)$k\begin{bmatrix}3\\5\\10\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (C)$k\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (D)$k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$

二、填空题（11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

(11)当$x\to 0$时，函数$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$与$g(x)=e^{x^2}-\cos x$是等价无穷小，则$ab=$________.

(12)曲线$\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt$的弧长为________.

(13)设函数$z=z(x,y)$由$e^z+xz=2x-y$确定，则$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$________.

(14)曲线$3x^3=y^5+2y^3$在$x=1$对应点处的法线斜率为________.

(15) 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)-f(x)=x, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(16)已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_3=1, \\ x_1+ax_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ ax_1+bx_2=2 \end{cases}$ 有解，其中 a,b 为常数.若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=4$，则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=$ ________.

三、**解答题**（17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 10 分）

设曲线 $L:y=y(x)\ (x>\mathrm{e})$ 经过点 $(\mathrm{e}^2,0)$，L 上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(I)求 $y(x)$；

(II)在 L 上求一点，使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小，并求此最小面积.

(18)（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{\cos y}+\dfrac{x^2}{2}$ 的极值.

(19)（本题满分 12 分）

已知平面区域$D=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\geqslant 1\right\}$.

(I)求D的面积；

(II)求D绕x轴旋转所成旋转体的体积.

(20)（本题满分 12 分）

设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$x^2+y^2-xy=1$,$x^2+y^2-xy=2$与直线$y=\sqrt{3}x,y=0$围成，计算$\iint\limits_D \dfrac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(21)（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数，证明：

(I)若$f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

(II)若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得

$$|f''(\eta)|\geqslant\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

(22)（本题满分 12 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}$满足：对任意x_1,x_2,x_3，均有$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{bmatrix}$.

(I)求$\boldsymbol{A}$；

(II)求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$与对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.