2023 年数学三试题

一、选择题（1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项时最符合题目要求的.）

(1)已知函数 $f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$，则

(A) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在　　(B) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在

(C) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在　　(D) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x, x>0.\end{cases}$ 的一个原函数是

(A) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right), & x\leqslant 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, x>0\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right), & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, x>0\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$

(3)若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则

(A) $a<0,b>0$　　(B) $a>0,b>0$　　(C) $a=0,b>0$　　(D) $a=0,b<0$

(4)已知 $a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛”的

(A)充分必要条件　　(B)充分不必要条件

(C)必要不充分条件　　(D)既非充分也非必要条件

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^*=$

(A) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$

(6)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为

(A) $y_1^2+y_2^2$　　(B) $y_1^2-y_2^2$　　(C) $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　(D) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(7)已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\5\\9\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.若$\boldsymbol{\gamma}$可有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，则$\boldsymbol{\gamma}=$

(A)$k\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (B)$k\begin{bmatrix}3\\5\\10\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (C)$k\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (D)$k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$

(8)设随机变量X服从参数为1的泊松分布，则$E(|X-EX|)=$

(A)$\frac{1}{\mathrm{e}}$ (B)$\frac{1}{2}$ (C)$\frac{2}{\mathrm{e}}$ (D)1

(9)设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自总体$N(\mu_2,2\sigma^2)$的简单随机样本，且两样本相互独立，记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$，

$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$，则

(A)$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$ (B)$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(C)$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$ (D)$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(10)设X_1,X_2为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中$\sigma(\sigma>0)$是未知参数.记$\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$，若$E(\hat{\sigma})=\sigma$，则$a=$

(A)$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (C)$\sqrt{\pi}$ (D)$\sqrt{2\pi}$

二、填空题（11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

(11)$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=$________.

(12)已知函数$f(x,y)$满足$\mathrm{d}f(x,y)=\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2},f(1,1)=\frac{\pi}{4}$，则$f\left(\sqrt{3},3\right)=$________.

(13)$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$________.

(14)设某公司在t时刻的资产为$f(t)$，从0时刻到t时刻的平均资产等于$\dfrac{f(t)}{t}-t$.假设$f(t)$连续，且$f(0)=0$，则$f(t)=$________.

(15)已知线性方程组$\begin{cases} ax_1+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ ax_1+bx_2=2 \end{cases}$有解，其中$a,b$为常数.若$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=4$，则$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=$________.

(16)设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim B(1,p),Y\sim B(2,p),p\in(0,1)$，则$X+Y$与$X-Y$的相关系数为________.

三、解答题（17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 10 分）

设可导函数$y=y(x)$满足$a\mathrm{e}^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y+b=0$，且$y(0)=0,y'(0)=0$.

(I)求a,b的值；

(II)判断$x=0$是否为$y(x)$的极值点.

(18)（本题满分 12 分）

已知平面区域$D=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\geqslant 1\right\}$.

(I)求D的面积；

(II)求D绕x轴旋转所成旋转体的体积.

(19)（本题满分 12 分）

已知平面区域$D=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$，计算二重积分$\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(20)（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数，证明：

(I)若$f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

(II)若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得

$$|f''(\eta)|\geqslant\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

(21)（本题满分 12 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}$满足：对任意x_1,x_2,x_3，均有$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{bmatrix}$.

(I)求$\boldsymbol{A}$；

(II)求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$与对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(22)（本题满分 12 分）

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2},-\infty<x<+\infty$，令$Y=\mathrm{e}^X$.

(I)求X的分布函数；

(II)求Y的概率密度；

(III)Y的期望是否存在？